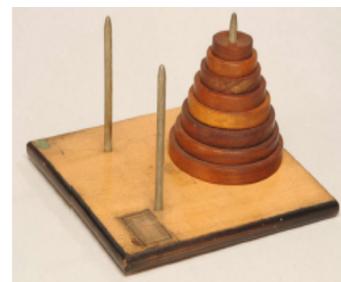


### Tarefa 1\_ Torres de Brama ou Torres de Hanoi

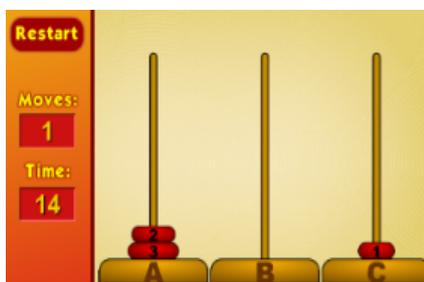
A Torre de Hanói, também conhecido como Torre de Brama, é um jogo que consiste em **movimentar discos** de diâmetros diferentes em três hastes seguindo a regra, dita divina segundo uma lenda antiga, de que se mova **um disco de cada vez** e um disco **não pode ser colocado sobre outro de menor diâmetro**.



Este jogo foi popularizado em 1883 como uma invenção do professor francês Édouard Lucas. A caixa original deste jogo encontra-se no *Musée des arts et métiers*, em Paris. Na figura encontra-se essa Torre de Hanói original, feita em madeira, que está no museu acompanhado por um texto com as regras e alguma informação sobre a antiga lenda indiana que motivou a sua criação.

Atualmente este jogo pode ser jogado em diversos suportes, especialmente digitais, online ou em aplicações para dispositivos móveis, mesmo em calculadoras gráficas, e o número de discos pode variar. Além de **mudar a torre de discos**, o objetivo passa por fazê-lo **com o menor número de movimentos**.

No link [https://www.mathplayground.com/logic\\_tower\\_of\\_hanoi.html](https://www.mathplayground.com/logic_tower_of_hanoi.html) encontras o jogo.



Note que há uma pequena variante das regras, que é a de que a torre terá de ser transferida, no final do jogo, para a haste C. É também possível escolher o número de discos da torre, de um a dez.

1. Complete a seguinte tabela que relaciona o número de discos ( $n$ ) com o número mínimo de movimentos para mudar a torre da haste A para a haste C ( $u_n$ ).

Número de discos ( $n$ )	1	2	3	4	5	6	7	8
Número mínimo de movimentos ( $u_n$ )								

2. Qual seria o número mínimo de movimentos se a torre tivesse 9 discos? E se tivesse 12 discos? Explica o teu raciocínio.

## A sucessão

Podemos estabelecer uma correspondência, entre o número ( $n$ ) de discos na haste (um número natural não nulo) e o respetivo número mínimo de movimentos para mudar a torre para outra haste (neste caso também um número natural não nulo). Como a cada número de discos corresponde um e um só número mínimo de movimentos para mudar a torre estamos perante uma **função**.

Uma função deste tipo é conhecida por uma **sucessão**, em que o domínio é o conjunto dos números naturais positivos.

Denominam-se os objetos por **ordens** e as respetivas imagens por **termos** da sucessão.

As sucessões, tal como outras funções, definem-se utilizando letras identificativas, sendo aqui as mais comuns  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Por exemplo, como viu na tabela do item 1, a **imagem do objeto 3 é 7**. Dizemos também que **7 é o termo de ordem 3**, ou que **7 é o 3º termo**. Designando esta função por  $(u_n)$ , escreve-se  $u_3 = 7$ .

As sucessões podem ser definidas por uma **representação gráfica**, por uma expressão analítica (**termo Geral** – aqui a variável é  $n$ ), por uma **tabela** (na horizontal ou na vertical) ou por **recorrência** (regra para obter um termo a partir de anteriores).

3. Represente graficamente os 4 primeiros termos da sucessão  $(u_n)$  dos movimentos mínimos de discos das torres de Hanoi .



4. Qual é o termo geral da sucessão  $(u_n)$  que te permite obter o número mínimo de movimentos ao substituir  $n$  pelo número de discos?

*Nota: Compare, na tabela do item 1, cada termo,  $u_n$ , com o número natural seguinte.*

5. Determina uma relação entre cada termo  $u_n$  e o anterior,  $u_{n+1}$ , independentemente de que valor considerado para  $n$ .
6. Pode observar abaixo dois programas escritos em linguagem *python*, cujo resultado é o mesmo, ou seja, a escrita dos sete primeiros números ímpares.

```
for n in range(1,8):
    print(2**n-1)
```

```
a=1
for n in range(1,8):
    print(a)
    a=a+2
```

↔ 1  
3  
5  
7  
9  
11  
13

- 6.1. Analise os programas e explique como, em cada caso, se pode obter o resultado.
- 6.2. Copie os programas para um editor de *python*, um de cada vez, e modifique-os de modo a que, após executado, forneça o número mínimo de movimentos para mudar entre duas hastes uma torre de Hanoi com um número de discos que varie entre 1 e 12.